数理解析研究所講究録
第2013巻 2016年 178-183

Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta-function

Takuya Okamoto
Department of Human Science and Common Educate, Nippon Institute of Technology

Tomokazu Onozuka
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 Introduction

Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数とは次のように定義される関数である。

$$\zeta_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1}):=\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{s_{r+1}}} \quad (1.1)$$

この級数は次の不等式を満たす領域において絶対収束する。

$$\begin{aligned}
&\Re s_{k_1}+\Re s_{r+1}>1 \quad (1\leq k_1\leq r)\\
&\Re s_{k_1}+\Re s_{k_2}+\Re s_{r+1}>2 \quad (1\leq k_1<k_2\leq r)\\
&\qquad\qquad\cdots\\
&\Re s_{k_1}+\Re s_{k_2}+\cdots+\Re s_{k_{r-1}}+\Re s_{r+1}>r-1 \quad (1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{r-1}\leq r)\\
&\Re s_1+\Re s_2+\cdots+\Re s_{r+1}>r
\end{aligned}$$

また、この関数は $\mathbb{C}^{r+1}$ 空間内に有理型に接続されることが知られている[1]。

この形の級数について、おそらく最初に研究したのが Tornheim[4] である。Tornheim は各変数が整数のとき $\zeta_{MT,2}$ の値についての研究を行った。その後 Mordell[3] も同様に $r=2$ で $s_1=s_2=s_3$ の場合について、値を研究を行った。これらの先駆的な研究により級数 (1.1) には Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数という名前が付けられている。

2 多重ゼータ関数の関数等式

タイトルにもある関数等式についてであるが、多重ゼータ関数の関数等式はまだあまり研究されていない。既に行われている研究としては松本の [2] が挙げられる。松本は [2] において Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数についての関数等式を与えた。(実際には Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数にパラメーターを付け加えて一般化した関数についての関数等式を与えている。) Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数とは次のように定義される関数である。

$$\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) := \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}$$

この級数は 2 つの不等式 $\Re s_2 > 1$、$\Re s_1 + \Re s_2 > 2$ を満たす領域において絶対収束し、$\mathbb{C}^2$ 空間に有理型に接続されることが知られている。この関数に対して松本は次の関数等式を与えた。

Theorem 2.1. *([2] THEOREM 1)*
複素数 u, v に対して次の等式が成り立つ。

$$\frac{g(u,v)}{(2\pi)^{u+v-1}\Gamma(1-u)} = \frac{g(1-v,1-u)}{i^{u+v-1}\Gamma(v)} + 2i\sin\left(\frac{\pi}{2}(u+v-1)\right) F_+(u,v) \tag{2.1}$$

ただし関数 $F_+(u,v)$、$g(u,v)$ はそれぞれ次のように定義される。

$$F_+(u,v) := \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{u+v-1}(k)\Psi(v, u+v; 2\pi ik) \tag{2.2}$$

$$g(u,v) := \zeta_{EZ,2}(u,v) - \frac{\Gamma(1-u)}{\Gamma(v)}\Gamma(u+v-1)\zeta(u+v-1) \tag{2.3}$$

また *(2.2)* と *(2.3)* の定義では約数関数 $\sigma_l(k) := \sum_{d|k} d^l$ と合流型超幾何関数

$$\Psi(a,c;x) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy} y^{a-1}(1+y)^{c-a-1} dy$$

を用いた。*($\Re a > 0,\ -\pi < \phi < \pi,\ |\phi + \arg x| < \pi/2$)*

関数 (2.2) はそのままでは不等式 $\Re u < 0$、$\Re v > 1$ を満たす領域でしか収束しないが、$\mathbb{C}^2$ 空間上まで有理型に接続できるため、関数 $F_+(u,v)$ は $\mathbb{C}^2$ 上で定義されることに注意しておく。

定理 2.1 の式 (2.1) はそのままでは Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式とは分かりにくいが、実際に Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式となっている。式 (2.1) の左辺と右辺第 1 項を見比べてみると、関数 $g(u,v)$ には 2 点 (u,v) と $(1-v,1-u)$ の間に関係があることが見てとれる。これにより式 (2.1) は $g(u,v)$ の関数等式になっていることが分かるが、$g(u,v)$ は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数を少し変形したものになっているので、式 (2.1) は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式と考えられる。

この関数等式の証明を応用して得られたのが今回の主結果である Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式である。ここからはその結果について述べる。そのための準備としていくつかの関数を定義する。まず約数関数のある種の一般化として次の 2 つの約数関数を定義する。

$$\sigma_a(\ell_1,\ldots,\ell_r) := \sum_{d|\ell_1,\ldots,d|\ell_r} d^a$$

$$\sigma_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r,s_{r+1};\ell_1,\ldots,\ell_r) := \sum_{d_1|\ell_1,\ldots,d_r|\ell_r} d_1^{s_1}\cdots d_r^{s_r}(d_1+\cdots+d_r)^{s_{r+1}}$$

ただし $\ell_1,\ldots,\ell_r$ は正の整数とし a は複素数とする。また Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数の関数等式では関数 $F_+(u,v)$ と $g(u,v)$ を用いたが、その Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数版として $F_r^{\pm}(s_1,\ldots,s_{r+1})$ と $g_r(s_1,\ldots,s_{r+1})$ をそれぞれ次のように定義する。

$$F_r^{\pm}(s_1,\ldots,s_{r+1}) = \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}=1}^{\infty} \frac{\sigma_{s_1+\cdots+s_{r+1}-1}(\ell_1,\ldots,\ell_{r-1})}{\ell_1^{s_1}\cdots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}} \times \Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};\pm 2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})) \tag{2.4}$$

$$g_r(s_1,\ldots,s_{r+1}) := \zeta_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1}) - \frac{\Gamma(1-s_r)\Gamma(s_r+s_{r+1}-1)}{\Gamma(s_{r+1})}\zeta_{MT,r-1}(s_1,\ldots,s_{r-1};s_r+s_{r+1}-1) \tag{2.5}$$

ただし $h(z) = 1/(e^z-1) - 1/z$ とする。上の式 (2.4) の右辺の級数は不等式 $\Re s_j > 1$ $(j=1,2,\ldots,r-1)$、$\Re s_r < 0$、$\Re s_{r+1} > 0$ を満たす範囲でし

か絶対収束しないが、$\mathbb{C}^{r+1}$ 空間上に有理型に接続できるため 関数 $F_r^{\pm}$ は $\mathbb{C}^{r+1}$ 上で定義されることに注意しておく。

以上の準備の下、Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式は次の定理のように表せる。

Theorem 2.2.

次の関数等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\frac{g_r(-s_1,\ldots,-s_{r-1},1-s_{r+1},1-s_r)}{i^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(s_{r+1})} \\
&\qquad + e^{\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}F_r^+(s_1,\ldots,s_{r+1}) + e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}F_r^-(s_1,\ldots,s_{r+1}) \\
&= \frac{g_r(s_1,\ldots,s_{r-1},s_r,s_{r+1})}{(2\pi)^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(1-s_r)} \\
&\quad + e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)} \sum_{\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}=1}^{\infty} \sigma_{MT,r-1}(s_1,\ldots,s_{r-1},s_r+s_{r+1}-1;\ell_1,\ldots,\ell_{r-1}) \\
&\qquad \times \Big\{\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})) \\
&\qquad\qquad + \Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};-2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}))\Big\}
\end{aligned}$$

上の定理 2.2 は定理 2.1 と同様に、一見 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式には見えないかもしれない。しかし、定理 2.2 の式の両辺の第 1 項を見比べてみると、関数 $g_r(s_1,\ldots,s_{r+1})$ には 2 点 $(s_1,\ldots,s_{r-1},s_r,s_{r+1})$ と $(-s_1,\ldots,-s_{r-1},1-s_{r+1},1-s_r)$ の間に関係があることが分かり、更に式 (2.5) より $g_r(s_1,\ldots,s_{r+1})$ は Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数を少し変形したものだったので、確かに Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の関数等式になっていることが分かる。

3　2つの関数等式の関係

定理 2.2 は $r=2$ のとき定理 2.1 の一般化となっている。実際、定理 2.2 において $r=2$ とおいて $(s_1,s_2,s_3)=(0,u,v)$ を代入すると定理 2.1 が得られる。このことを非常に簡単にではあるが見てみよう。

$r=2$ のとき関数 $g_2(s_1,s_2,s_3)$ は次のようになる。

$$g_2(s_1,s_2,s_3) = \zeta_{MT,2}(s_1,s_2;s_3) - \frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(s_2+s_3-1)}{\Gamma(s_3)}\zeta_{MT,1}(s_1;s_2+s_3-1)$$

この式に Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数の定義からすぐに得られる 2 つの関係式 $\zeta_{MT,2}(0,s_1;s_2)=\zeta_{EZ,2}(s_1,s_2)$ と $\zeta_{MT,1}(0;s_1+s_2-1)=\zeta(s_1+s_2-1)$ を用いれば

$$g_2(0,u,v)=g(u,v) \tag{3.1}$$

となることが分かる。同様に次の 2 つの関係式も簡単に得ることができる。

$$F_2^{\pm}(0,u,v)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\sigma_{u+v-1}(\ell)\Psi(v,u+v;\pm 2\pi i\ell) \tag{3.2}$$

$$\sigma_{MT,1}(0,u+v-1;\ell)=\sigma_{u+v-1}(\ell) \tag{3.3}$$

これらの式 (3.1)、(3.2)、(3.3) を定理 2.2 に代入すると定理 2.1 を得ることができる。

参考文献

[1] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in: M. A. Bennett et al.(Eds), Number Theory for the Mellennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417–440.

[2] K. Matsumoto, *Functional equation for double zeta-functions*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **136** (2004), 1–7.

[3] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 368–371.

[4] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math., **72** (1950), 303–314.

Takuya Okamoto
Department of Human Science and Common Educate
Nippon Institute of Technology
4-1 Gakuendai Miyashiro-machi, Saitama-gun, Saitama 345-8501
Japan
E-mail: takuyaoka@nit.ac.jp,
Tomokazu Onozuka

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya 464-8602
Japan
E-mail:m11022v@math.nagoya-u.ac.jp